Physics

Exercise 1: Coupled Harmonic Oscillators

The aim of this exercise is to study systems of coupled harmonic oscillators, as indicated in Fig. 1. We assume that

- The springs are characterized by the spring constants as indicated in the figure.
- The masses can be considered as mass points, sliding with viscous friction ($-\gamma\dot{x}$) on the floor. Their motion is considered as one-dimensional. Any vertical offsets are neglected.
- All masses are equal.

Part I.

(1) Consider the one-dimensional motion of a point mass (mass m) sliding horizontally with viscous friction (friction constant γ) on the floor, and attached to springs (spring constants k_1 and k_2) at each side. The other ends of the springs are fixed to walls on the right and on the left.
(a) Write down the equation of motion of the mass.
(b) Give all possible solutions of the equations of motion.
(c) Discuss the different types of possible motions.
(2) Consider in addition a driving force $F_0 exp(i\omega t)$ acting on m.
Reconsider the questions (1a) to (1c) above in this case.

Part II

(3) We now consider the one-dimensional motion of two masses m_1 and m_2 coupled by a spring (spring constant k_{12}). Moreover, m_1 is attached to the left wall by means of a spring of spring constant k_1, and m_2 is attached to the right wall by means of a spring of spring constant k_2. The friction constant γ is the same for both masses.
(a) Write down the equations of motion of the masses.
(b) Give the conditions for equilibrium of both masses, in terms of the equilibrium lengths l_{12}, l_1, and l_2 of the springs and the spring constants.

(4) In the absence of friction, γ=0, give the most general form of the solution.
(5) Consider in addition a driving force $F_0 exp(i\omega t)$. We assume that the solution to the above equations can be sought in the form $x_i = A_i exp(-i\omega t)$. Justify!
(6) Determine A_i.
(7) Discuss your result.

Part III

We now consider the one-dimensional motion of three masses m_1, m_2, m_3 coupled by springs. m_1 and m_2 are coupled as before through a spring of spring constant k_{12}. Analogously, m_3 is coupled to m_1 through a spring of spring constant k_{13}. Moreover, m_1 is attached to the left wall by means of a spring of spring constant k_1, and m_2 and m_3 are separately attached to the right wall by means of springs of spring constants k_2 and k_3 respectively. The friction constant γ is the same for all three masses.
(8) Give the equations of motion for the three masses.
(9) Use an ansatz as above to determine the oscillatory solution.
(10) Give an expression for the instantaneous power absorption of the oscillator.

Part IV

(11) Interpret your results of Part III.
(*Please note: in this question, we expect a detailed written discussion in whole sentences.*)

Part V

(12) Explain how to realise a damped harmonic oscillator with electronic elements such as capacitors, resistances and coils.
(13) How to realise the equivalent of the force $F_0 exp(i\omega t)$?
(14) Sketch an electronic equivalent of the setup of oscillators of Part II.
(15) Sketch an electronic equivalent of the setup of oscillators of Part III.

Physique

Exercice 1: Oscillateurs harmoniques couplés

Le but de cet exercice est l'étude d'un système d'oscillateurs harmoniques couplés (voir Figure 1). Nous supposons que

- les ressorts sont caractérisés par une constante de raideur commme indiquée sur la figure.
- les masses peuvent être considérées comme points de masse, se déplaçant avec friction visqueuse ($-\gamma\dot{x}$) sur le sol. Leur mouvement est considéré comme unidimensionnel. Tout mouvement vertical est négligé.
- Toutes les masses sont égales.

Partie I.

(1) Nous considérons le mouvement unidimensionnel d'un point de masse m qui se déplace horizontalement avec friction visqueuse (constante de friction γ). La masse m est attachée au mur par deux ressorts (constantes de raideur k_1 et k_2) de chaque côté.
(a) Ecrivez l'équation du mouvement de la masse.
(b) Donnez toutes les solutions de l'équation du mouvement.
(c) Discutez les differents types de mouvement possibles.
(2) Considérez en plus une force $F_0 exp(i\omega t)$ qui agit sur m.
Reconsidérez les questions (1a) à (1c) dans ce cas.

Partie II

(3) Nous considérons maintenant le mouvement uni-dimensionnel de deux masses m_1 et m_2 couplées par un ressort (constante de raideur k_{12}). Par ailleurs, m_1 est attaché au mur gauche par un ressort de constante de raideur k_1, et m_2 est attaché au mur droit par un ressort de constante de raideur k_2. La constante de friction γ est la même pour les deux masses.
(a) Ecrivez les équations du mouvement des deux masses.
(b) Donnez les conditions d'équilibre des deux masses, en termes des longueurs à l'équilibre des différents ressorts et des constantes de raideurs. On notera ces longueurs à l'équilibre l_{12}, l_1, et l_2.

(4) En absence de friction, γ=0, donnez la solution la plus générale.
(5) Considérez par ailleurs une force $F_0 exp(i\omega t)$ agissant sur m_1. Nous supposons que la solution aux équations du mouvement ci-dessus peut être cherchée sous forme de $x_i = A_i exp(-i\omega t)$. Justifiez!
(6) Déterminez A_i.
(7) Discuter votre résultat.

Part III

Nous allons maintenant considérer le mouvement unidimensionnel de trois masses m_1, m_2, m_3 couplées par des ressorts. m_1 et m_2 sont couplés – comme ci-dessus – par un ressort de raideur k_{12}. De façon analogue, m_3 est couplée à m_1 par un ressort de raideur k_{13}. Par ailleurs, m_1 est attachée au mur gauche par un ressort de raideur k_1, et m_2 et m_3 sont attachés au mur droit par moyen de ressorts de raideur k_2 et k_3 respectivement. La constante de friction γ est la même pour les trois masses.
(8) Ecrivez les équations du mouvement des trois masses.
(9) Utilisez une forme de solution comme ci-dessus pour déterminer la solution oscillatoire.
(10) Donnez une expression pour l'absorption de puissance par unité de temps du système.

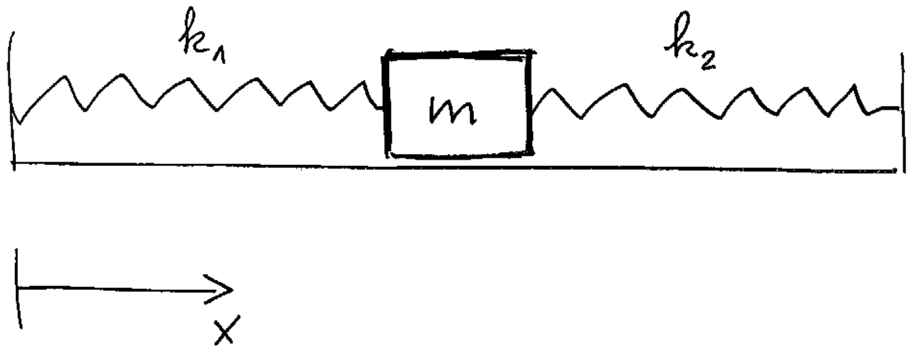
Partie IV

(11) Interprétez vos résultats de la Partie III.
(*A noter: dans cette question, il est demandé de donner une argumentation en phrases entières.*)

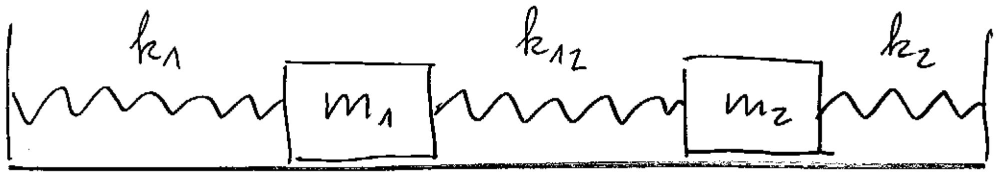
Partie V

(12) Expliquez comment on peut réaliser un oscillateur harmonique avec friction avec des éléments électroniques, tels que des capacitances, résistances et bobines.
(13) Comment réaliser l'équivalent de la force $F_0 exp(i\omega t)$?
(14) Esquissez un équivalent électronique du système d'oscillateurs de la Partie II.
(15) Esquissez un équivalent électronique du système d'oscillateurs de la Partie III.

I.



II.



III.